25/4/2019

<u>ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ</u> Αν G_1, G_2 ομάδες $\phi : G_1 \to G_2$
η ϕ λέγεται ομομορφισμός (ομάδων) αν
$\phi(a *_1 b) = \phi(a) *_2 \phi(b)$ για κάθε $a, b \in G_1$

ΔΕΙΞΑΜΕ ΟΤΙ αν ϕ ομομορφισμός:
1) $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$
2) $\phi(a^k) = (\phi(a))^k$ για κάθε $a \in G_1$, $k \in \mathbb{Z}$
3) (Ειδική περίπτωση του 2)) $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$
4) Αν H υποομάδα της G_1 τότε $\phi(H)$ υποομάδα της G_2
5) Αν L υποομάδα της G_2 τότε $\phi^{-1}(L)$ υποομάδα της G_1

Επίσης λέμε ότι · ϕ μονομορφισμός, αν ϕ 1-1 ομομορφισμός
· ϕ επιμορφισμός, αν ϕ επί ομομορφισμός
· ϕ ισομορφισμός, αν ϕ 1-1 και επί ομομορφισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Η $\phi: (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$ με $\phi(a)=2a$ μονομορφισμός ομάδων, αλλά δεν είναι ούτε επιμορφισμός άρα ούτε και ισομορφισμός.

Πράγματι, ϕ ομομορφισμός $\phi(a+b) = 2(a+b) = 2a+2b = \phi(a)+\phi(b)$ για κάθε $a,b \in \mathbb{Z}$
ϕ 1-1, γιατί $2a = 2a' \Rightarrow a=a'$, άρα ϕ μονομορφισμός. Φανερά $Im\phi = 2\mathbb{Z}$ = οι άρτιοι ακέραιοι άρα ϕ όχι επι. Επομένως, ϕ όχι επιμορφισμός, άρα ούτε, ισομορφισμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Έστω $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\phi(a) = -a$
Η ϕ είναι ισομορφισμός ομάδων.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\phi: G_1 \to G_2$ ισομορφισμός ομάδων. Άρα ϕ 1-1 και επι, συνεπώς ορίζεται η $\phi^{-1}: G_2 \to G_1$. Τότε η ϕ^{-1} ομομορφισμός, άρα ϕ^{-1} ισομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $a,b \in G_2$. Θα δείξουμε ότι
$\phi^{-1}(a+b) = \phi^{-1}(a) + \phi^{-1}(b)$
Θέτουμε $\tilde{a} = \phi^{-1}(a) \in G_1$, $\tilde{b} = \phi^{-1}(b) \in G_1$
Τότε $\phi(\tilde{a}+\tilde{b}) = \phi(\tilde{a}) + \phi(\tilde{b})$ αφού ϕ ομομορφισμός
Άρα $\phi(\tilde{a}+\tilde{b}) = a+b \Rightarrow \tilde{a}+\tilde{b} = \phi^{-1}(a+b)$
Άρα $\phi^{-1}(a+b) = \phi^{-1}(a) + \phi^{-1}(b)$, συνεπώς ϕ^{-1} ομομορφισμός. Αφού η αντίστροφη μιας 1-1 και επι συνάρτησης είναι 1-1 και επι, έπεται ϕ^{-1} ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω G_1, G_2, G_3 ομάδες. $\phi: G_1 \to G_2$, $h: G_2 \to G_3$ ισομορφισμοί. Τότε η $h \circ \phi: G_1 \to G_3$ είναι ισομορφισμός. (Δηλαδή σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από πρόταση σύνθεση ομομορφισμών

ομάδων είναι ομομορφισμός. Ξέρουμε σύνθεση δύο 1-1 απεικονίσεων είναι 1-1.
Ξέρουμε σύνθεση δύο ΕΠΙ απεικονίσεων είναι ΕΠΙ.
Άρα $h \circ f$ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω G_1, G_2 ομάδες. Οι G_1, G_2 λέγονται ισόμορφες ομάδες αν υπάρχει ισομορφισμός $\phi: G_1 \to G_2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Δύο ισόμορφες ομάδες έχουν
a) ίδιο πλήθος στοιχείων (αν είναι πεπερασμένες)
b) "ίδιες ιδιότητες"

Για παράδειγμα αν G_1, G_2 ισόμορφες και G_1 αβελιανή, τότε G_2 αβελιανή.
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω $\phi: G_1 \to G_2$ ισομορφ.
Έστω $a, b \in G_2$. Υπάρχουν (μοναδικά) $\tilde{a}, \tilde{b} \in G_1$ ώστε $a = \phi(\tilde{a})$ $b = \phi(\tilde{b})$. Τότε $a *_2 b = \phi(\tilde{a}) *_2 \phi(\tilde{b}) =$
$\phi(\tilde{a} *_1 \tilde{b}) = \phi(\tilde{b} *_1 \tilde{a}) = \phi(\tilde{b}) *_1 \phi(\tilde{a}) = b *_2 a$.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> Δείξτε ότι οι ομάδες $(S_3, \circ)$ και $(\mathbb{Z}_6, +)$ δεν είναι ισόμορφες, παρόλο που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.
<u>ΛΥΣΗ</u> Ξέρουμε ότι $(\mathbb{Z}_6, +)$ αβελιανή ενώ $(S_3, \circ)$ όχι αβελιανή. Άρα δεν είναι ισόμορφες.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u> Δείξτε ότι ομάδες $(\mathbb{Z}_5, +)$ $(\mathbb{Z}_7, +)$ δεν είναι ισόμορφες
<u>ΛΥΣΗ</u> Δύο πεπερασμένες ισόμορφες ομάδες έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αλλά $|\mathbb{Z}_5| = 5$, $|\mathbb{Z}_7| = 7$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω G_1, G_2 ισόμορφες ομάδες. Αν η G_1 είναι κυκλική, τότε και η G_2 είναι κυκλική.
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Αφού G_1 κυκλική υπάρχει $a \in G_1$ με $G_1 = \langle a \rangle$. Θέτουμε $b = \phi(a) \in G_2$
<u>ΙΣΧΥΡ.</u> $G_2 = \langle b \rangle$, άρα G_2 κυκλική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εξ ορισμού $\langle b \rangle = \{b^n : n \in \mathbb{Z}\}$
Αφού $b \in G_2$ $\langle b \rangle \subseteq G_2$ (1)
Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του G_2 είναι δύναμη του b. Έστω $c \in G_2$. Αφού ϕ ΕΠΙ και $G_1 = \langle a \rangle$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $c = \phi(a^k)$
Άρα $c = \phi(a^k) = (\phi(a))^k = b^k$. Συνεπώς $c \in \langle b \rangle$.
Άρα $G_2 \subseteq \langle b \rangle$ (2). Από (1) και (2) $G_2 = \langle b \rangle$, άρα G_2 κυκλική.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Δείξτε ότι οι ομάδες $\mathbb{Z}_4$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι ισόμορφες παρόλο που $|\mathbb{Z}_4| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 4$ και παρόλο που και οι δύο είναι αβελιανές.

ΛΥΣΗ Ξέραμε $\mathbb{Z}_4$ κυκλική, γιατί $\mathbb{Z}_4 = \langle 1 \rangle$
Έχουμε δει ότι η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ΔΕΝ έχει στοιχείο τάξης 4 (πιο συγκεκριμένα, έχει 1 στοιχείο τάξης 1 (το ταυτοτικό) και 3 στοιχεία τάξης 2. Άρα από την πρόταση οι ομάδες $\mathbb{Z}_4$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ΔΕΝ είναι ισόμορφες.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω G_1, G_2 ομάδες $\phi : G_1 \to G_2$ ομομορφισμός.
Ο πυρήνας $\ker\phi = \{a \in G_1 : \phi(a) = e_{G_2}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ $\ker\phi$ είναι υποομάδα της G_1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Φανερά $\ker\phi = \phi^{-1}(\{e_{G_2}\})$. Αφού $\{e_{G_2}\}$ υποομάδα της G_2 και από πρόταση αντίστροφη εικόνα υποομάδας είναι υποομάδα αφού ϕ ομομ. Το αποτέλεσμα έπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$
$\phi(a) = a^2$. Έχουμε δει ϕ ομομορφισμός.
Βρείτε τον $\ker\phi$.

ΛΥΣΗ $\ker\phi = \{a \in \mathbb{R}^* : a^2 = 1\} = \{1, -1\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω G_1, G_2 ομάδες $\phi : G_1 \to G_2$ ομομορφ.

Τ.Α.Ε.Ι. i) ϕ 1-1
ii) $Ker\phi = \{e_{G_1}\}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> i) $\Rightarrow$ ii) Υποθέτουμε ϕ 1-1. Έχουμε $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$ αφού ϕ ομομορφισμός. Άρα $\phi^{-1}(\{e_{G_2}\}) = \{e_{G_1}\}$ αφού ϕ 1-1. Άρα $Ker\phi = \phi^{-1}(\{e_{G_2}\})$ έχουμε $Ker\phi = \{e_{G_1}\}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Υποθ. $Ker\phi = \{e_{G_1}\}$. Θα δείξουμε ότι ϕ 1-1. Έστω $\alpha, \alpha' \in G_1$ με $\phi(\alpha) = \phi(\alpha')$. Τότε

$\phi(\alpha) = \phi(\alpha') \Rightarrow (\phi(\alpha)) *_2 (\phi(\alpha'))^{-1} = (\phi(\alpha')) *_2 ((\phi(\alpha))^{-1}) = e_{G_2}$

$\Rightarrow \phi(\alpha) *_2 (\phi(\alpha')^{-1}) = e_{G_2} \Rightarrow \phi(\alpha *_1 (\alpha')^{-1}) = e_{G_2}$
$\Rightarrow \alpha *_1 (\alpha')^{-1} \in Ker\phi = \{e_{G_1}\} \Rightarrow \alpha *_1 (\alpha')^{-1} = e_{G_1} \Rightarrow$
$\alpha *_1 (\alpha')^{-1} *_1 (\alpha') = e_{G_1} * \alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha'$. Άρα ϕ 1-1

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $\phi : G_1 \to G_2$ ομομορφ. ομάδων και $\alpha \in Im\phi$. Έστω $\tilde{\alpha} \in G_1$ με $\phi(\tilde{\alpha}) = \alpha$. Τότε
$\phi^{-1}(\{\alpha\}) = \tilde{\alpha} * (Ker\phi)$

Με άλλα λόγια τα στοιχεία της G_1 που απεικονίζονται στο α μέσω της ϕ είναι η αριστερή πλευρική κλάση (σύμπλοκο) $\tilde{\alpha} *_1 (Ker\phi)$ της υποομάδας $Ker\phi$ της G_1.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> <u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1.</u> $\tilde{\alpha} *_1 (Ker\phi) \subseteq \phi^{-1}(\{\alpha\})$

<u>ΑΠΟΔ.</u> Έστω $h \in Ker\phi$. Τότε $\phi(\tilde{\alpha} *_1 h) = \phi(\tilde{\alpha}) *_2 \phi(h)$
$= \phi(\tilde{\alpha}) *_2 e_{G_2} = \phi(\tilde{\alpha})$

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2.</u> $\phi^{-1}(\{\alpha\}) = \tilde{\alpha} *_1 Ker\phi$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω $b \in \phi^{-1}(\{\alpha\})$. Τότε $\phi(b) = \alpha = \phi(\tilde{\alpha})$. Άρα $\phi(b) = \phi(\tilde{\alpha})$

$\Rightarrow (\phi(\tilde{\alpha}))^{-1} *_2 \phi(b) = (\phi(\tilde{\alpha}))^{-1} *_2 \phi(\tilde{\alpha}) \Rightarrow$
$(\phi(\tilde{\alpha})^{-1}) *_2 \phi(b) = e_{G_2} \Rightarrow \phi((\tilde{\alpha})^{-1} * b) = e_{G_2} \Rightarrow$
$(\tilde{\alpha})^{-1} * b \in Ker\phi \Rightarrow$ υπάρχει $r \in Ker\phi$ με $(\tilde{\alpha})^{-1} *_1 b = r$
$\Rightarrow b = \tilde{\alpha} *_1 r \in \tilde{\alpha} *_1 Ker\phi$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ Έστω G_1, G_2 πεπερασμένες ομάδες $\phi: G_1 \to G_2$ **ΕΠΙΜΟΡΦΙΣΜΟΣ**. Τότε $|\ker\phi| = \frac{|G_1|}{|G_2|}$ και για κάθε $a \in G_2$ το σύνολο $\{b \in G_1 : \phi(b) = a\}$ έχει $\frac{|G_1|}{|G_2|}$ στοιχεία

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού ϕ επί το G_1 είναι η ξένη ένωση των $\phi^{-1}(\{a\})$ για $a \in G_2$. Από πρόταση $|\phi^{-1}(\{a\})| = |\ker\phi|$. Το αποτέλεσμα έπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Αν $|G_1| = 25$, $|G_2| = 5$ και $\phi: G_1 \to G_2$ επιμορφισμός, τότε για κάθε $a \in G_2$, ...

$$\# \phi^{-1}(\{a\}) = \frac{25}{5} = 5$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\phi: (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
$\phi(a) = a^2$. Τότε η ϕ είναι επιμορφισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $h: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ $\quad h(a) = a^2$
Τότε η h είναι επιμορφισμός.